

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapă locală, 14.02.2026****Clasa a V-a****Barem de evaluare****SUBIECTUL I**Considerăm numerele  $a = 2^{51} \cdot 2^{52} \cdot 2^{53} \cdot \dots \cdot 2^{100}$  și  $b = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{3774}$ Comparați  $a$  și  $b+1$ .

Soluție și barem

**2,5 p oficiu**

$$a = 2^{51} \cdot 2^{52} \cdot 2^{53} \cdot \dots \cdot 2^{100} = 2^{51+52+53+\dots+100} \dots 4p$$

$$51+52+53+\dots+100=(1+2+\dots+100)-(1+2+\dots+50)=100 \cdot 101 : 2 - 50 \cdot 51 : 2 = 3775 \dots 6p$$

$$a = 2^{3775} \dots 0,5p$$

$$b = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{3774}$$

$$2b = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{3775} \dots 4p$$

$$\text{Atunci } 2b - b = 2^{3775} - 1 \Rightarrow b + 1 = 2^{3775} \dots 6p$$

$$\text{Deci, } a = b + 1 \dots 2p$$

**SUBIECTUL II**Determinați numerele de forma  $\overline{abc} = 3^{b-a+c}$ .

Soluție și barem

**2,5 p oficiu**Din relația data deducem că numărul  $\overline{abc}$  este o putere a lui 3. .... 4p

$$3^5 = 243 \text{ sau } 3^6 = 729 \dots 6p$$

$$\text{Dacă } \overline{abc} = 243 \Rightarrow a = 2, b = 4 \text{ și } c = 3 \Rightarrow 3^{4-2+3} = 3^5 = 243 \text{ convine} \dots 5p$$

$$\text{Dacă } \overline{abc} = 729 \Rightarrow a = 7, b = 2, c = 9 \Rightarrow 3^{2-7+9} = 3^4 \neq 3^6 \text{ nu convine} \dots 5p$$

Numărul căutat este 243. .... 2,5p

**SUBIECTUL III**

O persoană urcă treptele unei scări după regula: urcă 3 trepte coboară 2 trepte, urcă din nou 5 trepte și coboară o treaptă.

- a) După 736 de pași, pe ce treaptă se află persoana?
- b) După câți pași ajunge pe treapta 736?

Soluție și barem

2,5 p oficiu

a) la 11 pași ( $3 + 2 + 5 + 1$ ) persoana urcă  $3 - 2 + 5 - 1 = 5$  trepte.....7p

$736 = 11 \cdot 66 + 10$  de unde rezultă că persoana face  $11 \cdot 66$  pași urcă  $5 \cdot 66 = 330$  trepte, iar la încă 10 pași  $3 - 2 + 5 = 6$  trepte  $\Rightarrow 336$  trepte..... 10p

b) pentru că  $736 = 5 \cdot 147 + 1$  numărul de pași va fi  $147 \cdot 11 + 1 = 1618$  pași .....5,5p

#### SUBIECTUL IV

Spunem că un număr natural  $n$  este „2026-prieten” dacă acesta are exact **patru divizori** naturali, iar suma divizorilor săi este egală cu 3042.

- a) Arătați că numărul 2026 este un număr „2026-prieten”.
- b) Determinați toate numerele „2026-prietene” de forma  $p^3$ , unde  $p$  este un număr prim.

*Prof. Vasile Ioan Gînta, Tg.Mureș*  
*Prof. Paula-Maria Dărăban, Reghin*

Soluție și barem

2,5p oficiu

- a) Divizorii numărului 2026 sunt: 1, 2, 1013 și 2026 .....2p  
Suma divizorilor numărului 2026 este:  $1 + 2 + 1013 + 2026 = 3042$  .....2p  
Deci, **2026** este un număr „2026-prieten”.....2p.

Numărul  $p$  este prim, atunci divizorii numărului  $p^3$  sunt:  $1, p, p^2, p^3$ , (în total 4 divizori, deci prima condiția este îndeplinită).....3p  
Suma divizorilor trebuie să fie:  $1 + p + p^2 + p^3 = 3042$ .....3p

Grupăm termenii și obținem:  $(1 + p) + p^2(1 + p) = 3042 \Rightarrow (1 + p)(1 + p^2) = 3042$ .  
Căutăm un număr prim  $p$  pentru care produsul  $(1 + p)(1 + p^2) = 3042$ .....5,5p

Dacă  $p = 13 \Rightarrow 14 \times 170 = 2380$  (prea mic).....2p

Dacă  $p = 17 \Rightarrow 18 \times 290 = 5220$  (prea mare).....2p

Deducem că nu există numere „2026-prietene” de această formă.....1p

**Notă:** Orice altă rezolvare corectă a unei probleme, se evaluează cu maxim de puncte (22,5p)

*Probleme propuse de prof. Seceleanu Daniela, prof. Gînta Vasile, prof. Dărăban Paula*